# TD 32 : Intégration

## Propriétés de l'intégrale

**Exercice 1.** Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t+i}$

**Exercice 2.** Pour chacune de ces fonctions, donner l'ensemble de définition, de dérivabilité puis calculer la dérivée :

$$f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t^2+1} dt \qquad g : x \mapsto \int_2^{2x} \frac{1}{\ln t} dt \qquad h : x \mapsto \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \arctan(t^2)\, dt$$

**Exercice 3.** Déterminer les limites suivantes :

$$1) \quad \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \qquad 2) \quad \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} \frac{n \sin x}{x+n} dx \qquad 3) \quad \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \sqrt{1+x^n} dx$$

**Exercice 4.** Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt$$

1) Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
2) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (on pourra intégrer par parties avant de majorer l'intégrale).
3) Montrer que $f$ possède une limite finie en 0 que l'on déterminera. On pourra étudier le comportement quand $x$ tend vers 0 de
$$\int_x^{2x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$$

**Exercice 5.** Soit $f \in C^0([a,b], \mathbb{R})$. Montrer que

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)|\, dt \quad \iff \quad f \geq 0 \quad \text{ou} \quad f \leq 0$$

**Exercice 6.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \leq 1$ et $\displaystyle\int_0^1 f = 1$. Montrer que $f \equiv 1$.

**Exercice 7** (**Lemme de Riemann-Lebesgue**)**.** Soit une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

1) On suppose $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t) \sin(nt) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
2) Montrer que le résultat est encore vrai si $f$ est en escalier sur $[a,b]$.
3) En déduire que le résultat est encore vrai si $f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

**Exercice 8** ($\star$)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ une fonction telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$. Montrer que $f$ admet un point fixe.

## Calcul d'intégrales (piqûre de rappel)

**Exercice 9** (Calcul d'intégrales)**.** Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_2^5 \frac{dt}{t^2-t}$

2) $\displaystyle\int_0^1 t^2(t^3+1)^5 dt$

3) $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) dt$

4) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t + \tan t}$

5) $\displaystyle\int_1^8 \frac{dt}{2\sqrt[3]{t}-1}$

6) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 7} \frac{dt}{1-4e^{-2t}}$

7) $\displaystyle\int_1^2 \frac{t+1}{t^2-t-6} dt$

8) $\displaystyle\int_{-1}^2 t\,|t|\,dt$

9) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t}{(t^2+t+1)(t^2-t+1)} dt$

## Formules de Taylor

**Exercice 10.** Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\right| \leq \frac{|x|^7}{7!}$$

**Exercice 11.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ ce que vaut : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

**Exercice 12.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la dérivée d'ordre $n+1$ de $f : x \mapsto \ln(1+x)$.

En déduire, avec une formule de Taylor, la limite de la suite de terme général $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

## Sommes de Riemann

**Exercice 13.** Calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$

2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$

3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

4) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \cdots + \sqrt[n]{2^n}\right)$

**Exercice 14.** En faisant apparaitre une somme de Riemann, déterminer un équivalent pour les suites suivantes :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^3}$$

## Continuité uniforme, etc.

**Exercice 15.** Est-ce que l'application $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,1]$ ? Et sur $[1,+\infty[$ ? En déduire si $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Même questions pour $g : x \mapsto \ln x$ sur $]0,1]$, puis $[1,+\infty[$ et enfin $\mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 16.** Soit $f : [0,1[ \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue. Montrer que $f$ est bornée. Le résultat est-il encore vrai si $f$ est seulement supposée continue ?